Concours Commun National 1997 . MAROC

MATHEMATIQUES II

Epreuve d'agèbre et de géométrie durée : 4 heures

Option MP

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les représentations graphiques et les dessins correctement exécutés seront appréciés.

Dans tout le problème, E_n désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geq 1$, muni du produit scalaire noté $(x|y)$. La norme euclidienne associée est notée $||x|| = \sqrt{(x,x)}$.
On note $L(E_n)$ l'ensemble des endomorphismes de E_n, $S(E_n)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E_n, $O(E_n)$ son groupe orthogonal et $GL(E_n)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles de E_n.
Par la suite, ϕ désigne un autre produit scalaire sur E_n et on note $S_\phi = \{x \in E_n \ / \ \phi(x,x) = 1\}$.

I – Première partie

1. Montrer qu'il existe $u \in S(E_n)$ ayant toutes ses valeurs propres strictement positives tel que :
$$\forall (x,y) \in E_n^2, \ \phi(x,y) = (u(x)|y).$$
2. Trouver $v \in S(E_n)$ ayant toutes ses valeurs propres strictement positives tel que $v^2 = vov = u$.
Montrer que $\phi(x,y) = (v(x)|v(y))$ pour tout $(x,y) \in E_n^2$.
3. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E_n. Montrer que $B' = (v^{-1}(e_1), \ldots, v^{-1}(e_n))$ est une base ϕ-orthogonale, c'est à dire orthogonale *pour le produit scalaire* ϕ.
4. Soit f un élément de $O(E_n)$.
Montrer que $v^{-1}ofov \in O(\phi)$, où $O(\phi) = \{g \in L(E_n) \ / \ \forall (x,y) \in E_n^2, \ \phi(g(x), g(y)) = \phi(x,y)\}$.
En déduire $O(\phi)$ en fonction de $O(E_n)$.
5. Dans cette question $E_2 = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi((x,y),(x,y)) = x^2 - xy + y^2$.
   (a) Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Tracer S_ϕ dans le plan.
   (c) Déterminer la matrice de v dans la base canonique.
   (d) En déduire la forme matricielle générale des éléments de $O(\phi)$. On pourra laisser le résultat sous forme de produits matriciels.
6. On précise que cette question peut-être résolue sans calcul matriciel.
Ici $n = 3$ et f est une rotation d'axe orienté par un vecteur unitaire ω et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
   (a) Pour $v \in GL(E_n)$, déterminer les vecteurs invariants de $v^{-1}ofov$, ainsi qu'un plan stable. Y a-t-il d'autres vecteurs propres ou plans stables ?
   (Indication : on différenciera les cas $\theta \equiv \pi[2\pi]$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.)

(b) Si v est elle-même une rotation, montrer que $v^{-1}ofov$ est une rotation dont on donnera l'axe et l'angle. Que dire si v est une réflexion ?
On pourra utiliser sans justification la formule :

$$\forall x \in \{\omega\}^{\perp} \text{ tel que } ||x|| = 1, \text{ on a } sin(\theta) = det(\omega, x, f(x)),$$

où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe.

II – Seconde partie

On se place dans E_2 muni d'une base orthonormée (i, j) et on définit la norme :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ ||xi + yj||_\infty = Sup(|x|, |y|).$$

On note $S_\infty = \{u \in E_2 \ / \ ||u||_\infty = 1\}$.

1. Représenter S_∞. Quels sont les vecteurs de plus grande norme euclidienne ?
2. On note $G_\infty = \{g \in O(E_2) \ / \ g(S_\infty) = S_\infty\}$.
   (a) Montrer que G_∞ est un groupe.
   (b) On cherche les rotations g de G_∞. A l'aide de la question II.1, déterminer les rotations de G_∞.
   (c) Trouver une symétrie dans G_∞ et en déduire les 8 éléments de G_∞ que l'on décrira.
3. On note $S_1 = \{xi + yj \ / \ |x| + |y| = 1\}$.
   Représenter S_1 et déterminer les éléments du groupe $G_1 = \{g \in O(E_2) \ / \ g(S_1) = S_1\}$.

III – Troisième partie

On note à nouveau $O(\phi) = \{g \in L(E_n) \ / \ \forall (x, y) \in E_n^2, \ \phi(g(x), g(y)) = \phi(x, y)\}$.
On pourra utiliser le fait que $g \in L(E_n)$ est un élément de $O(\phi)$ si et seulement si $g(S_\phi) = S_\phi$.
Enfin, on définit $G(\phi) = O(\phi) \cap O(E_n)$.

1. Dans cette question $n = 2$.
   (a) Montrer que S_ϕ est une ellipse. A quelle condition est-ce un cercle ?
   (b) Si S_ϕ est un cercle, déterminer G_ϕ.
   (c) Si S_ϕ est une ellipse distincte d'un cercle et $g \in G_\phi$, montrer que g conserve le grand axe de S_ϕ ainsi que son petit axe.
   (d) En déduire que si S_ϕ est une ellipse distincte d'un cercle, alors G_ϕ compte 4 éléments que l'on précisera.
2. Dans cette question $n = 3$. On note λ, μ et ν les trois valeurs propres de l'endomorphisme symétrique u défini à la question I.1, avec : $\lambda \geq \mu \geq \nu > 0$.
   (a) Décrire S_ϕ en distinguant les cas d'égalité des valeurs propres de u.
   (b) Si $\lambda = \mu = \nu$, décrire les éléments de G_ϕ.
   (c) Si $\lambda > \mu > \nu$, montrer que tout $g \in G_\phi$ conserve le grand axe de S_ϕ. En déduire que G_ϕ a 8 éléments. Est-il isomorphe au groupe G_∞ de la partie II ?
   (d) Déterminer G_ϕ lorsque $\lambda > \mu = \nu$ et lorsque $\lambda = \mu > \nu$.
3. Généraliser les résultats précédents sur G_ϕ en dimension n quelconque.